

# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## ¿Qué es la Geometría?

La geometría es una de las ramas de las matemáticas, que estudia las propiedades de las figuras en el plano 2D o el espacio 3D.

La geometría estudia todos los elementos geométricos, cómo ahora son: los cruces, los puntos, las líneas, las rectas, los planos, las superficies, etc...

## Ideas y Conceptos Primitivos

Existen una serie de elementos que denominamos conceptos primitivos o ideas primitivas, que junto a los axiomas y lugares geométricos, conforman unas verdades geométricas que consideramos verdaderas y que no les hace falta demostración siendo verdades irrefutables.

Los conceptos primitivos o las ideas primitivas, son propiedades, que definen que es cada cosa geométrica, cómo ahora: el punto, el cruce, la recta, la línea, la arista, la curva, el ángulo, el vértice, la superficie, el área, el plano, etc....

A continuación se detallan estos conceptos primitivos o ideas primitivas que definen que son cada cosa y sus axiomas que son verdades geométricas.

## *El Cruce Adimensional y El Punto Dimensional*

El punto y el cruce adimensional, se refieren a algo parecido entre ellos, siendo los dos posiciones espaciales dentro de un plano 2D o espacio 3D dado.

El punto es una cosa física, que tiene área, y que también, puede tener volumen, por lo tanto tiene dimensiones y masa, que posicionalmente, representa una posición en el plano 2D con  $A \times B$ , y que también, representa un espacio 3D con  $A \times B \times C$ .

El cruce adimensional es solo la posición o dirección en un plano o un espacio, sin tener área ni volumen, donde Euclides dijo que era algo sin dimensiones ni espacio.

Así ambos ( puntos y cruces adimensionales ) son ambos posiciones en un plano o espacio, y solo el punto, puede contener algo con área y volumen que en su sucesión de puntos dimensionales puede concebir una recta muy usada para hacer cualquier tipo de figura en un plano o espacio.

## *La Recta, la Línea, la Arista o el Segmento*

La recta, la línea, la arista, o el segmento, es toda aquella sucesión de puntos, indicada entre 2 puntos o cruces adimensionales, construida de 2 a más puntos, con una longitud de dimensión 1, que están entre 2 cruces adimensionales de límite de dimensión ( 1 dimensión con 2 límites de dimensión ), que tienen longitud de ancho, y que no tiene ni alto ni fondo.

Así la línea, la recta o la arista es una longitud de ancho sin alto ni fondo.



# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## **Los Ángulos, las Intersecciones y los Vértices**

Los ángulos son la forma de medir la inclinación existente entre dos aristas de una intersección en un plano 2D, también son más de 2 aristas de un vértice de un bi-plano 2D, en los polígonos en planos 2D ( intersección del polígono ) o en un poliedro de bi-planos 2D ( vértice del poliedro ).

Así los ángulos son una especie de medición de inclinación entre dos rectas, líneas o aristas, en una intersección de un polígono en un plano 2D, o más de una inclinación entre más de 2 aristas de un vértice de un de un poliedro en un bi-plano 2D.

## **El Plano La Superficie o El Área**

La superficie, el plano, o el área, son un objeto de superficie de 2 Dimensiones que cubre la totalidad de la parte interior, de un poliedro solido o un polígono que son figuras finitas, las cuales cubren toda la superficie cerrada en una figura en 2D.

Las superficies, los planos, o las áreas, son las superficies de la región interior de las figuras 2D, que cubren la parte interior cerrada por los vértices de un poliedro o polígono.

## **La Región, El Multiplano o El Espacio**

El multiplano o el espacio, es el lugar geométrico e imaginario infinito, en el que ocurren los fenómenos descritos por la geometría, es un lugar donde se puede reproducir el método descrito por los conceptos primitivos, los axiomas y sus lugares geométricos.

La región de plano o espacio de un multiplano, es un trozo finito de plano 2D, o de un multiplano o espacio 3D , y es una zona que llamamos área, cuando es un plano, y volumen, cuando es un espacio o multiplano, y este se ubica en un plano o espacio multiplano infinito.

## **Las Dimensiones y Sus Limite**

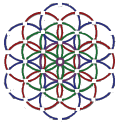
Las dimensiones geométricas son de 1 , 2 y 3 dimensiones, y contienen 2 , 4 , y 6 Limites de Dimensión respectivamente:

- 1D = La Recta, la línea, la arista, el segmento, está representa el Ancho de Izquierda a Derecha de los 2 cruces adimensionales.

- 2D = El Plano, la superficie, el área, está representa el Ancho y Alto de Izquierda a Derecha y de Arriba a Abajo de los 4 cruces adimensionales.

- 3D = El Espacio, está representa el Ancho, Alto, y Fondo de Izquierda a Derecha, de Arriba a Abajo, y de Frente a Fondo de los 6 cruces adimensionales.

Cada dimensión, contiene dos números limitan-tes llamados LD, que definen la propiedad del limite de esas dimensiones ( con cada una 1 = ancho = 2 Limites de Dimensión de Izquierda y Derecha o los llamados 2 LD ).



# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## Axiomas Geométricos

### ***Axiomas de Asociación Enlace o Incidencia***

Estos son los axiomas geométricos relacionados con la asociación, el enlace o la incidencia.

#### **Axioma 01: (de Hilbert con algo de Pol)**

2 puntos separados, determinan siempre una línea, una recta, una arista, finitas, que provienen de una línea infinita a la que pertenecen.

#### **Axioma 02: (de Hilbert con algo de Pol)**

2 puntos cualesquiera de una recta, separados uno del otro, determinan y hacen finita la recta.

#### **Axioma 03: (de Hilbert )**

La línea, la recta, la arista o el segmento, siempre tienen como mínimo 2 puntos, donde el plano, por lo menos tiene 3 puntos, no situados en la misma recta, donde el espacio, por lo menos tiene 4 puntos, con al menos 3 puntos situados en el mismo plano.

#### **Axioma 04: (de Hilbert)**

3 puntos que no estén sobre una misma recta, determinan el plano o superficie que los contiene.

#### **Axioma 05: (de Hilbert)**

3 puntos cualquiera en un plano, superficie o área, que no estén en la misma recta, determinan ese plano.

#### **Axioma 06: (de Hilbert)**

Si 2 cruces adimensionales de una recta pertenecen a un plano, todos los puntos de la recta, y la recta en si misma, pertenecen al mismo plano.

#### **Axioma 07: (de Hilbert)**

Si 2 planos tienen un punto en común, tienen, como mínimo, otro punto en común.

#### **Axioma 08: (de Hilbert)**

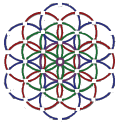
Hay por lo menos 4 puntos no contenidos en un plano.

#### **Axioma 09: (de Pol)**

Hay por lo menos 6 puntos no contenidos en un espacio.

#### **Axioma 10: (de Pol)**

4 puntos que no estén sobre un mismo plano, determinan el espacio que los contiene.



# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## **Axiomas de Ordenación**

Estos son los axiomas geométricos relacionados con la ordenación.

### **Axioma 01: (de Hilbert)**

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres cruces de una recta, y  $B$  está situado entre  $A$  y  $C$ , también está situado entre  $C$  y  $A$ .

### **Axioma 02: (de Hilbert)**

Si  $A$  y  $C$  son 2 cruces de una recta, hay al menos un punto,  $B$ , que se encuentra entre  $A$  y  $C$ , y un cruce  $D$  tal que  $C$  esta entre  $A$  y  $D$ .

### **Axioma 03: (de Hilbert)**

De 3 cruces cualquiera de una recta, hay siempre un cruce y solo uno de ellos, que esta comprendido entre los otros 2.

### **Axioma 04: (de Hilbert)**

Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tres cruces no pertenecientes a la misma recta, y  $R$  una recta del plano  $ABC$ , que no contenga a ninguno de los cruces  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , los segmentos  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$ , son tales, que o 2 de ellos o ninguno, tienen cruces comunes con  $R$ .

## **Axiomas de Paralelismo**

Este es el axioma que habla del paralelismo.

### **Axioma 01: (V postulado de Euclides ).**

Si 1 recta corta a otras 2, formando con ellas, hacia el mismo lado, ángulos interiores que suman menos que dos rectos, y estas rectas se prolongan indefinidamente, deben cortarse en la zona en que se hallan los dos ángulos cuya suma es menor que 2 rectos.

## **Axiomas de Congruencia o Movimiento**

Estos son los axiomas que hablan de la congruencia y el movimiento de igualdad por coincidencia.

### **Axioma 01: (de Peano )**

Los movimientos son transformaciones puntuales y biunivocas del espacio en si mismo que forman grupo.

### **Axioma 02: (de Peano )**

El inverso de un movimiento es un movimiento.



# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## **Axioma 03: (de Peano )**

Un movimiento transforma rectas en rectas ordenadamente, es decir , conservando el orden de sus puntos.

## **Axioma 04: (de Peano )**

Dado un punto  $A$  , una recta  $r$  pasando por  $A$  , una semirecta  $r_1$  de  $r$  un plano  $P$  que contenga a  $r$  y en el semiplano  $P_1$  , un espacio  $E$  conteniendo a  $P$  y en él un semiespacio  $E_1$  y, dados análogamente,  $A', r'_1, P'_1, E'_1$  existe un solo movimiento que transforma  $A$  en  $A'$ ,  $r_1$  en  $r'_1$ ,  $P_1$  en  $P'_1$ , y  $E_1$  en  $E'_1$

## **Axioma 05: (de Peano )**

Un movimiento que transforme una semirecta en si misma, tiene fijos todos los puntos de la semirecta, si transforma un semiplano en si mismo, teniendo fijos 2 puntos de la recta origen, tiene fijos todos sus puntos

## **Axioma 06: (de Hilbert )**

Si  $A$  y  $B$  son 2 puntos sobre una recta  $r$ , y además  $A$  es otro punto de la recta  $r$  u otra  $r$ , siempre se puede encontrar a un lado prefijado de la misma recta o de la  $r$  un punto  $B$  y solamente uno, tal que el segmento  $AB$  sea congruente con el  $A'B'$

## **Axioma 07: (de Hilbert )**

Si un segmento  $AB$  es congruente con el segmento  $A'B'$  es también congruente en  $A''B''$

## **Axioma 08: (de Hilbert )**

Si  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  son puntos así ordenados de la misma o de distinta recta, y tales que;

$AB = A'B'$  y  $BC = B'C'$  , también  $AC = A'C'$

## **Axioma 09: (de Hilbert )**

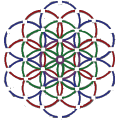
En un semiplano existe un ángulo y solo uno que, teniendo por lado una semirecta de su origen, sea congruente a un ángulo dado. Un ángulo es igual a si mismo independientemente del orden de sus lados

## **Axioma 10: (de Hilbert )**

Si un ángulo  $a^\circ$  es igual a otro  $a''^\circ$  y este lo es a un tercero  $a'''^\circ$  , también  $a^\circ$  y  $a'''^\circ$  serán iguales.

## **Axioma 11: (de Hilbert )**

2 triángulos que tengan 2 lados y el ángulo comprendido iguales, tienen respectivamente iguales, también, los otros 2 ángulos.



# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## Lugares Geométricos

### **Lugares Geométricos de Cruces Adimensionales**

Lugares Geométricos de cruces adimensionales:

**- Incentro:**

L. g. donde concurren las bisectrices de un triángulo.

**- Circuncentro:**

L. g. donde concurren las mediatrices de un triángulo.

**- Ortocentro:**

L. g. donde concurren las alturas de un triángulo.

**- Baricentro:**

L. g. donde concurren las medianas de un triángulo.

**- Centro Radical:**

L. g. de los cruces a igual distancia de 3 circunferencias.

**- Centro de Homología:**

L. g. donde concurren las rectas que contienen cruces homólogos.

**- Centro de Homotecia:**

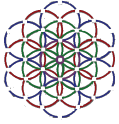
L. g. donde concurren las rectas que contienen cruces homotéticos.

**- Centro Semejanza:**

L. g. donde concurren las rectas que contienen cruces semejantes.

**- Centro de Inversión:**

L. g. donde concurren las rectas que contienen cruces inversos.



# Apuntes de Pol Sobre Geometría

## **Lugares Geométricos de Líneas**

Lugares Geométricos de líneas:

### **- Mediatriz:**

L. g. de los cruces equidistantes de los extremos de un segmento.

### **- Bisectriz:**

L. g. de los cruces equidistantes de los lados de un ángulo.

### **- Recta de Simpson:**

L. g. de los cruces que dividen en partes iguales al segmento que une un cruce cualquiera de un triángulo y el ortocentro.

### **- Eje Radical:**

L. g. de los cruces equidistantes de dos circunferencias.

### **- Ejes de Simetrías:**

L. g. de los cruces dobles de una simetría.